ISTITUTO COMPRENSIVO STATALE
BARTOLOMEO LORENZI
DI FUMANE

Contributi per
IL CURRICOLO DI MATEMATICA

Se chiedi ai matematici che cosa facciano, ottieni sempre la stessa risposta. Pensano. Loro pensano a problemi difficili ed inusuali. Loro non pensano a problemi ordinari: scrivono solo la risposta. **M. Egrafov** (matematico contemporaneo)

Il non-matematico non può neanche immaginare le gioie che gli sono negate. L'amalgama di verità e di bellezza che si rivela con la comprensione di un teorema importante non è raggiungibile attraverso nessun altra esperienza umana, se non forse - non saprei - con il misticismo religioso. Anche se i miei studi sono stati piuttosto esigui, come bagnare i piedi sulla riva dello sterminato oceano della matematica, hanno segnato per sempre la mia vita, dandomi un piccolo assaggio di un mondo superiore. Sì, hanno reso leggermente più credibile - e addirittura tangibile - l'esistenza dell'ideale. **Apostolos Doxiadis** (matematico, regista, scrittore contemporaneo)

UN PROGETTO IN RETE PER LINEE GUIDA PER UN CURRICOLO CONDIVISO

Riflettiamo ora su cos'è la matematica. Di per sé è un sistema astratto, un'invenzione dello spirito umano, che come tale nella sua purezza non esiste. È sempre realizzato approssimativamente, ma - come tale - è un sistema intellettuale, è una grande, geniale invenzione dello spirito umano. La cosa sorprendente è che questa invenzione della nostra mente umana è veramente la chiave per comprendere la natura, che la natura è realmente strutturata in modo matematico e che la nostra matematica, inventata dal nostro spirito, è realmente lo strumento per poter lavorare con la natura, per metterla al nostro servizio attraverso la tecnica.
(Colloquio con i giovani, 6 aprile 2006) **papa Benedetto XVI**

RELAZIONE FINALE SUL PERCORSO DI FORMAZIONE MATEMATICA

A cura di Novella Franchini-
funzione strumentale per il curricolo di Matematica
dell'Istituto Comprensivo Bartolomeo Lorenzi di Fumane.

Si è concluso in marzo il primo ciclo di incontri di Formazione Matematica della rete P.R.I.S.M.A.
L'aggiornamento, rivolto agli insegnanti della scuola dell'infanzia e della scuola Primaria, aveva lo scopo di individuare delle linee guida per un curricolo condiviso in continuità verticale ed orizzontale.
Il bisogno di promuovere una formazione matematica fra gli insegnanti della rete si sentiva da tempo e quindi, quella, che è stata chiamata "emergenze educativa" dal ministro Fioroni, si è trasformata in esigenza di formazione per le scuole della rete P.R.I.S.M.A.
Il percorso ha visto come relatore ed animatore il professor Ruggero Ferro della facoltà di Scienze del dipartimento di Informatica dell'Università di Verona, con il quale si sono individuati alcuni nodi cruciali nell'insegnamento della Matematica. In relazione a ciò, sono state predisposte attività di formazione con destinatari i docenti dei vari ordini di scuola degli istituti in rete P.R.I.S.M.A.
Erano previsti: un incontro per la scuola dell'Infanzia come " Introduzione alla matematica" e sei per la primaria, tre lezioni e tre momenti in lavoro di gruppo, riguardanti "I numeri Naturali e le operazioni", "I numeri Razionali ed il problema dei decimali" e " Lingua e matematica"
In realtà, gli incontri, per la scuola dell'Infanzia, si sono quadruplicati su richiesta degli insegnanti stessi, che hanno manifestato molta partecipazione e voglia di approfondire.
E ciò in considerazione del fatto che è proprio nella scuola dell'Infanzia che si pongono le basi per quell'atteggiamento verso la matematica che fonda poi il pensiero logico e critico, che nelle indicazioni per il curricolo del settembre 2007 viene richiesto come fondamentale nella formazione dell'alunno, tanto da venire descritto come primo traguardo per lo sviluppo delle competenze in uscita dal ciclo primario (scuola primaria e secondaria di primo grado): "L'alunno ha rafforzato un atteggiamento positivo rispetto alla matematica e, attraverso esperienza in contesti significativi, ha capito come gli strumenti matematici appresi siano utili in molte situazioni per operare nella realtà".
Il tema è stato perciò sviluppato riflettendo sul significato della Matematica, sull'importanza della stessa per lo sviluppo integrale della persona libera e consapevole, sulla necessità del protagonismo dell'alunno che sviluppa interesse e curiosità verso i problemi in generale, le quantità, il tempo, lo spazio.
Davvero interessante ed immediatamente operativo il fermarsi a far apprezzare le quantità attraverso il colpo d'occhio prima e quindi la corrispondenza per l'individuazione del di più o di meno. (vedi gli appunti, riveduti e corretti dal prof Ruggero Ferro, di "Introduzione alla matematica").
Ben presto è nata la domanda circa la specificità dell'ordine di scuola: che cosa è importante affrontare nella scuola dell'Infanzia? E soprattutto come lavorare? Che cosa invece lasciare alla scuola primaria? Come educare la famiglia a condividere con la scuola una proposta di formazione oltre l'informazione? Come sviluppare fin dalla tenera età la naturale capacità di astrazione e di immaginazione nei bambini? E poi: contare quando? E che cosa significa contare?
Che cosa ritenere come specifico dell'Infanzia e che cosa come specifico della Primaria, nella costruzione del curricolo?

Nella realtà della scuola di base si osserva ancora discontinuità, sia verticale che orizzontale, vale a dire nel passaggio dalla scuola dell'Infanzia alla scuola Primaria spesso si lamentano forzature o non considerazioni circa gli apprendimenti del precedente ordine di scuola.
Diventa perciò molto importante per la costruzione di un curricolo, che abbia a cuore la centralità dell'alunno che apprende, ritrovarsi e dialogare circa la specificità dell'insegnamento. Occorre inoltre individuare delle linee guida comuni, condividendo i valori di orientamento nell'educare i ragazzi ad un "atteggiamento corretto verso la Matematica, inteso anche come una visione adeguata della disciplina, non ridotta ad un insieme di regole da memorizzare ed applicare, ma riconosciuta ed apprezzata come contesto per affrontare e porsi problemi significativi e per esplorare e percepire affascinanti relazioni e strutture che si ritrovano e ricorrono in natura e nelle creazioni dell'uomo" (pag 94, indicazioni per il curricolo)
L'atteggiamento positivo viene alimentato tenendo viva negli alunni la curiosità e valorizzando la fantasia, perché per procedere ad esempio nella risoluzione di un problema è necessario immaginare e prevedere il percorso ed i risultati. Ed anche questa concezione è in contrasto con quello che normalmente si dice della Matematica e che fa fuggire dalla stessa, cosa che la scuola deve assolutamente evitare. Come fare quindi per far amare la Matematica? Certamente amandola! Ma non si può amare che cosa non si conosce a fondo, e questo significa promuovere formazione negli insegnanti e conoscenze approfondite circa gli elementi della disciplina.
Perciò nei tre incontri-lezione si è cercato di approfondire attorno ai Numeri Naturali ed ai Numeri Razionali e sul rapporto fra la Lingua e la Matematica.
Che idea abbiamo dei numeri naturali? Che cosa vuol dire operare? Che cosa significa calcolare? Questi i problemi affrontati per costruire un curricolo in continuità verticale e che è possibile ritrovare negli appunti della corrispondente lezione su "Numeri Naturali ed operazioni"
Ad ogni lezione è seguito un lavoro di gruppo nel quale oltre a chiarire dubbi legittimi sull'argomento affrontato, gli insegnanti hanno riportato esperienze d'insegnamento, evidenziando difficoltà incontrate, ma anche ipotizzato possibili cambiamenti metodologici nell'educazione come ad esempio separare nella risoluzione dei problemi il calcolo dalla procedura risolutiva, facendo uso di lettere al posto dei numeri, come accade in altri sistemi scolastici. Il momento del lavoro di gruppo ha fatto emergere la poca abitudine alla valorizzazione dell'esperienza personale, ma anche che occorre condividere scelte metodologiche e didattiche.
Molto interessante, anche se non sempre di facile comprensione, l'approfondimento sui numeri Razionali e l'affronto del problema dei decimali (vedi appunti non ancora rivisti e corretti)
Far incontrare prima i bambini con le frazioni o con i decimali? Tutto dipende dal modo di presentare i numeri. Se si parte da ciò che già si sa occorre partire dai numeri Naturali e dalla frazione come rapporto fra due naturali. E perchè sono nati i razionali? Ci sono interruzioni nella successione?
Nella costruzione del curricolo appare sempre più importante mantenere viva la capacità e la possibilità di fare domande, proprio perché in questo ha sede il possesso del significato delle nozioni. Imparare mnemonicamente senza ben capire quello che si sta acquisendo non permette di apprezzarne l'importanza. Altro aspetto, oltre alla curiosità ed alla fantasia da coltivare costantemente nella scuola, per un apprendimento significativo della Matematica, è dare meno importanza alla velocità della risposta e di più alla riflessione sulla gestione delle informazioni. Che cosa è rilevante e che cosa lo è meno?
E poi ecco la problematica attorno al rapporto " Lingua e Matematica". Un incontro che ha fatto riflettere sulle potenzialità ed i limiti del linguaggio. Ancora di più in questo incontro è stato possibile rendersi conto di quanto sia importante la formazione degli insegnanti e di come per la costruzione del curricolo sia fondamentale la conoscenza dei principi della Matematica e che l'insegnamento della matematica non coincide con i suoi contenuti, ma sia soprattutto educazione a pensare.
In conclusione si potrebbero allora elencare alcune parole o concetti attorno a cui sviluppare un curricolo di matematica in continuità in una scuola che abbia a cuore la formazione della persona e

la centralità dell'alunno che apprende e che si potrebbero sintetizzare in linee guida o nuclei concettuali attorno ai quali attivarsi per ottenere un apprendimento efficace:

- Mantenere, valorizzare e premiare la naturale curiosità
- Promuovere la capacità di fare domande
- Incentivare l'uso della fantasia e immaginazione
- Partire dai problemi, non solo matematici
- Approcciarsi alla matematica come organizzazione razionale della realtà e assolutamente non come insieme di tecniche
- Fare confronti, dialogare, alimentare la possibilità di formulare ipotesi
- Individuare i nodi che limitano la comprensione o la non comprensione
- Focalizzare l'attenzione sui significati delle operazioni
- Distinguere il calcolo (che avviene sui simboli) dal significato
- Riflettere sul linguaggio formale
- Premiare risposte ragionate, convincenti e riflesse, più che la velocità delle risposte(da disincentivare)
- Ricordare che l'apprendimento è individuale e che l'esperienza è personale
- Non dare nulla per scontato

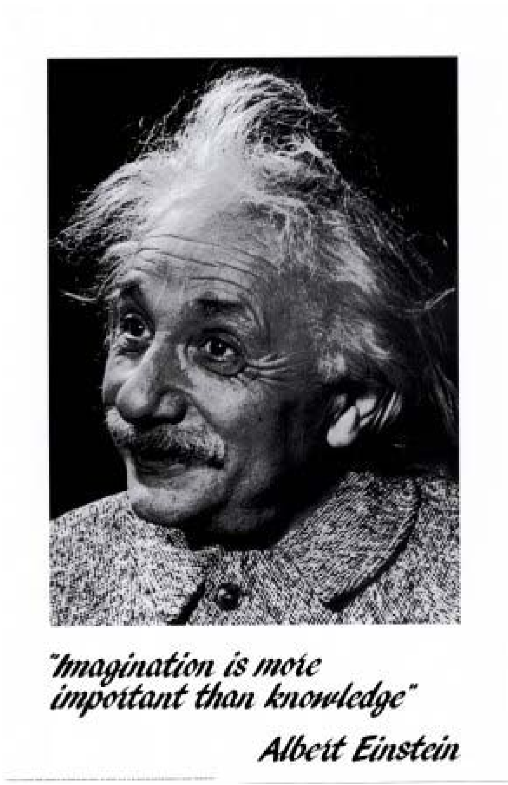
Forse ci si aspettava la stesura di un curricolo inteso come una serie di obiettivi da sviluppare didatticamente in unità di apprendimento, ma non era questo lo scopo di questo primo approfondimento, perché è nella creatività dell'insegnante o meglio del gruppo di insegnanti che attraverso il dialogo, il confronto con l'esperienza quotidiana di insegnamento con lo specifico gruppo classe che si trovano ad avere, che nascono le idee per concretizzare il che cosa e come fare. Ci interessava che nascesse la voglia di incontrarsi e trovare strategie di insegnamento efficace e così è stato. Ci premeva anche, vista la dichiarata non formazione matematica da parte degli insegnanti, che si riprendessero in mano i numeri e ciò che sta a loro attorno, la matematica insomma con i suoi problemi , ma anche soprattutto con il suo fascino e la sua forza capace di muovere la mente dei grandi della Storia.

INTRODUZIONE ALLA MATEMATICA

La facoltà che mette in moto l'invenzione matematica non è il ragionamento, bensì l'immaginazione. **Augustus De Morgan** (1806-1871)

In realtà le matematiche esigono molta immaginazione, è impossibile essere un buon matematico se non si è, nello stesso tempo, un po' poeta. **Sofia Vasilyevna Kovalevskaya** (1850-1891)

La più alta categoria dell'intelletto immaginativo è sempre eminentemente matematica. **Edgar Allan Poe** (1809-1849)



APPUNTI da

"INTRODUZIONE ALLA MATEMATICA" (per la scuola dell'Infanzia)

Prof Ruggero Ferro

SAN PIETRO IN CARIANO**,** 13 novembre 2007

Discutendo sull'insegnamento della matematica, quali difficoltà ?

Raccordo fra scuola dell'infanzia e primaria: alcuni insegnanti della primaria lamentano le conoscenze sbagliate sui numeri con cui i bambini arrivavano già all'inizio della scuola primaria. ~~s~~apendo che è più facile dare buone nozioni che correggerne di sbagliate, nasce la domanda: **quale è il ruolo della scuola dell'infanzia e quale quello della primaria** per l'avvio alla matematica?

Ma la matematica che cosa è: che idea abbiamo di matematica? La matematica fa parte della vita di tutti i giorni, come lo è la lingua, e la divisione~~,~~ fra sapere umanistico e matematica non esiste, è artificiosa. Il bambino è uno, e vive integrandole tutte le sue esperienze.

I ragazzini della scuola dell'infanzia, anche se sono molto piccoli, già a casa vivono un'esperienza culturale, più o meno evoluta, e spesso a casa imparano già a contare, **ma che cosa vuol dire contare?**
Respirano fin da piccoli la visione che la matematica è costituita regole da imparare, si fa così e basta, **ma perché si fa così?** Si ripetono delle cose senza cogliere o riflettere sul significato e questo in tutti gli ordini di scuola, purtroppo.

Ha senso la matematica? La matematica per la maggior parte dei ragazzi non ha senso. Nella mentalità corrente la matematica non ha senso. Anche persone di successo dicono che la matematica si studia solo perché bisogna impararla o insegnarla, ma, di fatto, non serve in molti campi della vita.

Che cosa è la matematica? Proviamo a individuare osservazioni che ci permettano di arrivare ad un'idea di matematica, anche se schematica. **Da dove vengono i problemi di comprensione dell'uomo**: vengono dalla limitatezza della sua capacità di cogliere quanto avviene, e dalla limitatezza della sua capacità di gestione delle informazioni. Pensiamo a quando questa mattina ci siamo alzati. Con quale piede siamo scesi dal letto? Che tappeto c'era? Vi ricordate tutto? Non è umanamente possibile gestire tutte le informazioni, troppe informazioni sono uguali a nessuna informazione, devo eliminarne alcune, quali sono le informazioni che elimino, quali no? Dipende dallo scopo che mi prefiggo.
Ad esempio se ho due cani e li porto fuori, quando rientrano li conto? No perché li conosco e quindi so subito se uno manca. Ma se uno ha contato 253 chiodini che gli servono per un lavoro, e, dopo averli messi da parte su un tavolo, prima di iniziare il lavoro viene interrotto, tornando si accorge immediatamente a colpo d'occhio (come ha fatto con i due cani) se ne manca qualcuno, individuando esattamente chi manca o chi è stato sostituito, oppure li conta ancora per vedere se almeno la quantità è rimasta come prima? Il contare non dice tutto degli elementi che si considerano, contandoli non ci ai accorge se dei chiodini sono stati sostituiti, ma si colgono aspetti che sembrano sufficienti per lo scopo che ci si prefigge, infatti, per completare il lavoro, non interessa l'identità di ogni singolo chiodino in quanto uno vale tanto quanto un altro. L'esempio mostra come le informazioni possono essere alcune importanti altre meno: per non perdersi nel mare delle informazioni, è fondamentale trascurare le informazioni ritenute poco rilevanti nell'affrontare una specifica situazione, in modo da rimanere con un

insieme di informazioni abbastanza semplice da poter essere gestito, ma sufficientemente ricco da poter precisare quanto serve della situazione considerata. Si noti che la rilevanza delle informazioni può essere giudicata solo a posteriori ed è sempre in relazione allo scopo prefissato.

Ma come si fa a gestire le informazioni? Si noti che comunque occorre gestire le informazioni per poter decidere come può essere conveniente comportarsi.
I pastori nei passati millenni segnavano, su un supporto opportuno, le pecore che uscivano dall'ovile per vedere se erano tante quante quelle che entravano nell'ovile, trascurando le informazioni su come era la pecora, che aspetto aveva eccetera, cioè aiutavano la memoria a ricordare oltre i propri limiti annotando, trascuravano le informazioni non rilevanti per la situazione, e organizzavano in modo opportuno quelle rilevanti. La Matematica nei millenni, nei secoli, ha fatto proprio questo: elaborato dei sistemi di annotazione, trascurato informazioni non rilevanti per il problema da affrontare, e di organizzazione (nel modo migliore) delle informazioni rilevanti sulla molteplicità con cui si presenta il vissuto. Una buona organizzazione delle informazioni rilevanti permette di trasformare la complicazione intrattabile delle tante informazioni in un sistema, eventualmente complesso, di informazioni, ma, auspicabilmente, gestibile. Naturalmente si cerca di contenere la complessità del sistema di informazioni alla minore possibile, ma si utilizza quel tanto di complessità che serve per tener conto di tutti i dati rilevanti facendoli scendere, grazie alla loro organizzazione, da pochi ritenuti fondamentali, in modo da ridurre al minimo le informazioni fondamentali. Anche il bambino ha un suo modo di organizzare le sue informazioni sulla molteplicità. Può essere una organizzazione diversa da quella proposta dalla matematica e andrà confrontata con questa: se è più opportuna quella del bambino, egli avrà dato un contributo allo sviluppo della matematica e dell'umanità, altrimenti è meglio che accetti quello che è stato elaborato precedentemente.

Quanto finora detto riguarda la matematica in generale, ma quale matematica è opportuno sviluppare nella scuola dell'infanzia?
Se si analizzano le nuove indicazioni, troviamo dei punti che non sono del tutto chiari: si parla di filtri, ambienti, elaborazioni ecc.. Che cosa significano questi suggerimenti nel concreto della scuola? E il suggerimento di procedere per tentativi ed errori che cosa significa? Che cosa sono gli errori? Qualcosa è proprio errato o piuttosto è non conveniente? Gli errori sono forse dei preconcetti, o violazioni di divieti? Approfondire, sistematizzare, processi di simbolizzazione e formalizzazione, sono espressioni delle indicazioni, ma che cosa significano?
Simbolizzazione indica un uso di simboli, e ogni simbolo va condiviso, nasce da una convenzione, rappresentiamo con simboli certe cose in un certo modo nato da un accordo. E cosa si intende per formalizzare? Non è semplicemente rappresentare, come si intende in genere. Formalizzare ha a che fare moltissimo con la matematica che, per certi aspetti, potrebbe essere detta una formalizzazione. Per approfondire cosa si intende per formalizzare, consideriamo l'esempio del calcolo aritmetico, con i simboli (cifre) indichiamo dei numeri, ma i numeri li indichiamo anche con parole, così le cifre sono forse una stenografia? Noi usiamo le cifre arabe, con cui scriviamo i numeri. Volendo eseguire una somma, in genere si mettono le cifre di posizione corrispondente dei due numeri dati una sotto l'altra, in colonna, e si ottiene il risultato operando sulle cifre, cioè su dei simboli. Si sta usando una tabellina, quella della somma, per determinare le cifre da mettere nel risultato. Le tabelline lavorano sulle cifre. In questo procedimento si usano delle particolarissime regole per ottenere il nome del risultato. La somma è un'altra cosa. Il formalizzare è inventare delle regole che lavorano sui simboli. Il linguaggio formale permette di eseguire delle procedure. Il computer pur non sapendo assolutamente che cosa fa, mi dà dei nomi di risultati giusti, utilizzando opportune trasformazioni sulla rappresentazione simbolica, a partire da quella dei dati iniziali. Il computer

è una macchina, non capisce assolutamente il significato delle simbolizzazioni che elabora. Siamo noi che cogliamo il significato della notazione a cui perviene la macchina.

Vogliamo che i nostri bambini diventino delle macchine? Farli lavorare formalmente? La macchina è un operatore stupido, che esegue solo comandi senza aver bisogno del significato. La civiltà romana era avanzata~~,~~ basandosi sulla schiavitù, il romano non faceva i conti, ma li faceva fare agli schiavi. I Romani non avevano un calcolo, non operavano sui loro simboli con trasformazioni sulle successioni di simboli per ottenere il nome del risultato di operazioni. Avere un sistema formale ha fatto fare passi enormi, l'inventare sistemi formali corretti è uno degli obiettivi della matematica. Le difficoltà nell'invenzione di sistemi formali stanno nella dimostrazione della loro correttezza, poiché è molto complesso dimostrare che un sistema formale è corretto. Il processo di rappresentare certi significati con simboli opportuni sui quali sono state costruite regole corrette per eseguire trasformazioni in corrispondenza ad operazioni sui significati è detto formalizzare, anche se questa parola usata nel linguaggio scolastico non è rispondente a questo significato. Il passo più importante nella processo di formalizzazione è far vedere che funziona, cioè mostrare che le regole stabilite sulle trasformazioni di simboli portano effettivamente alla simbolizzazione del risultato, risultato che si otterrebbe applicando ai dati il significato dell'operazione a cui corrispondono quelle regole. L'aritmetica Razionale insegnava il perché la formalizzazione delle operazioni funziona, dimostrando la correttezza delle regole di trasformazione sui simboli.
Il fatto poi che i bambini pensino alle operazione come trasformazioni di simboli, e non colgano invece il loro significato, crea delle difficoltà che emergono, nelle elementari, quando essi affrontano i problemini. Questi mettono in crisi il ragazzo che ha imparato solo il calcolo formale, egli cerca di risolvere il problema posto provando con le varie operazioni, a partire da quella che appare più semplice dal punto di vista dell'esecuzione del calcolo, cioè con più, trascurando il collegamento tra quanto richiesto dal problema e il significato dell'operazione, dal momento che non conoscono questo significato. Spesso, scuola, il ragazzo impara a capire che cosa vuole sentirsi rispondere l'insegnante mediante una certa richiesta, e si adegua, piuttosto che comprendere il significato della richiesta e rispondere in modo consono al significato della domanda.
A pagina 30 delle indicazioni per l'Infanzia ci sono parole che possono avere diverso significato a seconda di chi le legge. "*La scuola dell'infanzia organizza…….campi di esperienza…* ": emerge un linguaggio, che può essere compreso solo da chi è dell'ambiente.
La Matematica non è una convenzione, ma le parole scelte per indicare le nozioni della matematica sono state scelte mediante accordi interpersonali, convenzionalmente.~~-~~**I bambini, come imparano il linguaggio convenzionale della matematica?** Ci sono studi di logica matematica (anche sulla parola logica ci sarebbe da discutere) che evidenziano i limiti del linguaggio. Ognuno ha una sua idea del sistema dei numeri naturali, ma non e' possibile raccontarlo con precisione mediante le parole, in nessun linguaggio.
In matematica ci sono le definizione, ma le difficoltà con le definizioni sta nel fatto che per spiegare una parola ci vogliono altre parole dai significati già noti, se invece le parole usate nella spiegazione non sono conosciute occorre definire anche queste e sapere il significato delle altre parole utilizzate in queste ulteriori definizioni, così, per spiegare una parola, non conoscendone alcuna, occorre proseguire all'infinito con definizioni di altre parole sempre diverse per spiegare le precedenti. Il vocabolario, essendo finiti, ad un certo punto spiega delle parole con le parole che si dovevano spiegare. Il vocabolario fa circoli viziosi, il circolo si rompe se si sa il significato di qualcuna delle parole: di qualche parola occorre conoscere il significato indipendentemente dalla sua definizione nel vocabolario.
In matematica, alcune nozioni si chiamano nozioni primitive, non perché vengano prima, ma perché abbiamo deciso di non definirle, si suppone che se ne conosca il significato, e da lì si parte. Così ci sono conoscenze che vengono date per scontate. Che cosa viene dato per scontato

che sappiano i bambini di 4 anni.? Che idea, di cui non e' mai stata data una definizione, hanno su tanti aspetti del loro vissuto? Ci sono delle difficoltà nel rispondere a queste domande.

È necessario che l'insegnante sappia che alcune cose le ha date per scontate. Così, dinanzi alla non risposta di un bambino, non si deve pensare che non sa niente, ma, piuttosto, ci si deve chiedere che cosa diamo per scontato che si sappia e che invece non e' conosciuto.

La matematica è piena di nozioni che si suppone che gli altri sappiano. Un esempio sono i numeri naturali: chi deve comunicare che cosa sono i numeri naturali e come può farlo? Non è semplice. Alcuni bambini della scuola dell'infanzia vengono da casa che sanno già contare. Analizziamo il problema~~,~~: che cosa voglio ottenere con una corretta introduzione dei numeri naturali, quale è l'idea di numero naturale? **I numeri naturali sono uno strumento che ci costruiamo per apprezzare quantità di elementi.**

Di molte cose apprezziamo la quantità: (è di più o di meno di qualcos'altro?), ma non necessariamente parliamo di quantità di elementi. Ad esempio: è di più un elefante o un topo. Se si sta considerando una quantità di elementi, un elefante e un topo sono uguali, sono sempre un solo elemento, ma, se il confronto è rispetto al peso, sono molto diversi. Quindi deve essere chiaro sempre **rispetto a quale caratteristica si fa il confronto.**

Il confronto deve essere sempre rispetto a qualche aspetto, non considerandone altri. L'operazione di considerare alcuni aspetti e non altri viene chiamata astrazione. Questa è un'operazione mentale molto importante nella costruzione di concetti. Attenzione che la parola astratto si usa anche per indicare enti non concreti, ma non e' detto che il concetto di un ente non concreto sia ottenuto per astrazione, sicché i due usi della parola vanno attentamente distinti. La teoria di Piaget dice che l'astrazione si conquista attorno ai dieci anni, in realtà anche un bambino piccolo sa astrarre, nel momento in cui chiama tato qualunque altro bambino che ha alcune caratteristiche uguali alle sue, egli fa un'astrazione, ed ha solo poco più di un anno. Direi che questa difficoltà nella teoria di Piaget nasce dal non aver chiarito cosa si intende per astrazione.

I numeri naturali sono nati per apprezzare la quantità di elementi. L'introduzione dei numeri naturali, la lascerei alla scuola primaria. Nella scuola dell'infanzia fermiamoci piuttosto ad approfondire la nozione di quantità di elementi e sui confronti tra quantità di elementi. Il confronto di quantità di elementi introduce alla nozione di numero. Ma il passaggio non è semplice, che cosa sono i numeri rispetto alla quantità di elementi? Che cosa sono gli elementi? Non approfondiamo ora come ci si forma la nozione di elemento, ma supponiamo che ciascun alunno colga cosa si intende quando si dice un elemento. Sappiamo che due insiemi hanno la stessa quantità di elementi se c'e' una biiettività tra i due. Se degli insiemi sono costituiti da un solo elemento sono evidenti le biiettività tra loro, e si e' individuata una particolare quantità di elementi che si vede direttamente, e a cui si impara a dare il nome uno. Anche per gli insiemi con tanti elementi quanti i distinti elementi *a* e *b* si vedono immediatamente le biietticità tra loro e si determina una nuova quantità di elementi che si coglie a colpo d'occhio e a cui viene dato il nome due. Proseguendo così si riescono ad individuare con immediatezza quantità di elementi fino al cinque sei, per riconoscere le quali non ho bisogno di contare. Distinguiamo quindi le quantità che si colgono con il colpo d'occhio. In questo modo si arriva facilmente (magari con un po' di esercizio) a riconoscere a colpo d'occhio queste prime quantità di elementi e ad associare ad esse il loro nome.

Una maestra di San Floriano aveva fatto un'esperienza in cui aveva portato i ragazzini a riconoscere velocemente le quantità fino a cinque-sei elementi, poi un giorno ha portato in classe trenta stuzzicadenti e ha chiesto agli alunni di riconoscerne la quantità, gli alunni si sono organizzati e facendo gruppetti da tre e gruppetti da tre di gruppetti da tre sono arrivati a dire che la maestra aveva portato tre gruppetti di tre gruppetti di tre stuzzicadenti e un altro gruppetto da tre stuzzicadenti. Poi, una bambina (diligente ma che precedentemente non aveva dato segni di particolare brillantezza) ha osservato che se i gruppi fossero stati da sei invece che

da tre cinque gruppi da sei sarebbero stati sufficiente per dire quanti erano quegli stuzzicadenti senza dover considerare gruppi di gruppi, e si sarebbe arrivati prima e più semplicemente al risultato. I**n un primo momento, dunque, è importante farsi una chiara nozione di quantità di elementi e saper apprezzare e distinguere varie** le **quantità di elementi poi si imparerà a contare.** Già nella prima fase si può iniziare a introdurre dei segni, dei simboli, ma il suo aspetto principale e' portare ad organizzarsi per vedere se è più grande una certa quantità di elementi o un'altra.
Per apprezzare le quantità senza contare, l'operazione da fare è **mettere in corrispondenza biiettiva gli elementi di un insieme con quelle di un altro. Invece contare è prendere in considerazione un elemento alla volta** e memorizzando quel che ho fatto, anche se la memoria è limitata e dovrà essere aiutata annotando quanto fatto su un altro supporto. Si può confrontare una qualsiasi quantità di elementi con la quantità ad essa biiettiva di ripetizioni dell'operazione mentale di considerare un nuovo elemento dell'insieme, essendo partiti dal non considerare niente e procedendo fino all'esaurimento degli elementi da contare. Così contando si distinguono le varie quantità di ripetizioni dell'operazione di considerare un ulteriore elemento e si trova un confronto di riferimento per apprezzare le diverse quantità. **Quando la memoria non e' sufficiente per tener conto di tutto ciò che si deve ricordare la si aiuta annotando.** Il contare non è una cantilena, che, tuttavia, può essere utile perché, dopo aver apprezzato le quantità, si deve pure dare un nome a ciascuna di esse. La cantilena va bene, **ma è opportuno che sia associata ad un significato.** Anche se l'umanità ha costruito un sistema agevole per parlare di quantità molto grandi, è opportuno che i bambini comincino presto a rendersi conto delle grandezze di quanto dicono: quanto è grande 24? E quando si arriverà a mille~~,~~? Quanto tempo si impiega per contare fino a tremila? Se contassi un numero al secondo quanto tempo impiegherei per contare fino a tremila? Sono tremila secondi, cioè cinquanta minuti, quasi un'ora.
Anche sapersi rendere conto che una quantità è davvero tanto grande, pur senza precisare uno specifico numero, è già un apprezzare le quantità.
Certo, il contare, con tutte le sue difficoltà, permette di apprezzare le quantità di elementi, ma ci sono anche altri modi, a volte più diretti per apprezzare quantità di elementi, ad esempio determinando, senza contare, quale tra due insiemi di elementi è più grande o quale e' più piccolo.
Ad esempio, in una sala sono di più le sedie o le persone: se si fa corrispondere ciascuna persona alla unica sedia su cui e' seduta e si esauriscono le sedie mentre avanzano persone in piedi significa ci sono più persone; al contrario se tutti sono seduti e avanzano sedie, vuol dire che ci sono più sedie. Il considerare corrispondenze non richiede l'insiemistica, le corrispondenze esistono da che mondo è mondo, mettere delle frecce per indicare quale elemento corrisponde a quale, non è insiemistica. Questa è nata con la nozione di insieme introdotta nel 1870 e rotti da Cantor che stava prendendo in considerazione situazioni patologiche del calcolo infinitesimale, delle quantità infinite: sono di più i punti della retta o quelli del piano? Come quantità sono uguali, perché esiste una corrispondenza uno a uno che copre entrambi gli insiemi, c'è una biiettività.
Che cosa è questa nozione di insieme? Forse avere caratteristiche comuni tra gli elementi di un insieme? C'è poi la nozione di collezione. **Che cosa significa collezione?** Significa pensare ad alcune cose e considerare la totalità delle cose su cui si è fissata l'attenzione. Un insieme è una collezione, nel senso precisato, ma, in più, nella nozione di insieme la collezione viene pensata come cosa singola. Una squadra è pensata come cosa singola. **Un insieme è una collezione che è elemento.** La squadra è una unità: la squadra ha vinto, la squadra partecipa ad un torneo. La famiglia è una collezione che e' un insieme, infatti, se dico la famiglia è numerosa, tale aggettivo è riferito non alle persone della famiglia, ma all'intera collezione che e' la famiglia che viene considerata come cosa singola. L'insieme è nello stesso tempo collezione ed elemento. La teoria degli insiemi è molto complicata e si basa su assunzioni né

banali, né facili da accettare, quindi è meglio non prenderla in considerazione a questo livello scolare, se non negli aspetti più banali e non legati alla introduzione delle quantità e dei numeri, come, invece, è successo storicamente quando sembrava che tutto lo si dovesse fare con questa teoria.

Purtroppo la teoria degli insiemi è stata introdotta nelle scuole da persone che non l'avevano capita e che ne proponevano una versione assurda. È importante non insegnare cose sbagliate~~,~~ perché assurde, altrimenti si obbligano i bambini a non ragionare, a non pensare: in Francia è stata vietata l'insiemistica nelle scuole~~,~~ non dico di vietarla, ma piuttosto che dire fesserie è meglio abbandonarla. Va benissimo raccogliere e raggruppare, non va bene parlare di insiemi in modo non opportuno.

E ogni volta che facciamo fare agli alunni delle esperienze, non dimentichiamo mai il fine che ci si propone nel suggerire quell'esperienza, sia che esso sia un confronto, o una osservazione. Ma non si fa logica mediante queste attività. Nelle indicazioni che vengono dal ministero si parla di logica: che cosa significa logica? Spesso questa parola è usata perdendo il suo originale significato, come molte parole d'altra parte. A pagina 36 delle linee guide si legge: pensare logicamente. Quale è il significato di questa espressione? La parola logica nel gergo comune è usata come parola jolly, che spesso significa "devi fare così?": per imporre dei comportamenti diciamo che sono logici. La parola logica viene usata in tanti e diversi contesti con tanti significati diversi. Forse, nel caso proposto, si può sostituire con "criticamente", o meglio "coerentemente", o "senza entrare in contraddizione con quanto già detto". Ogni volta che si trova la parola logica, sarebbe meglio sostituirla con una parola più adeguata al contesto, in quel quadro.

Altro esempio di parola usata scorrettamente è la parola digitale che non ha niente a che fare con le dita, ma significa un qualcosa che si basa sulle cifre (dal loro nome inglese che è digits).

Quanto detto non vuole dire portare ad un cambiamento di tutto il modo di insegnare, ma portare ad un ripensamento di ciò che stiamo insegnando.

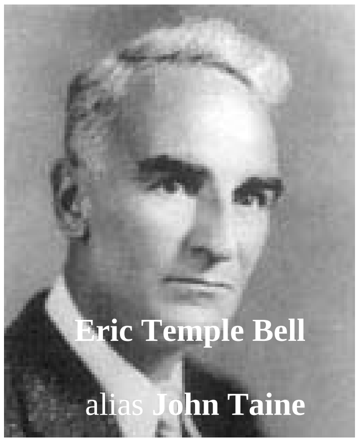
Dove iniziamo il ripensamento? Nella scuola dell'Infanzia ed in quella elementare? Nell'ambiente scolastico c'è un procedere per compartimenti stagni o addirittura per contrapposizioni e scontri, e ciò succede in tutti gli ordini di scuola. Certamente occorre sapere che cosa è stato fatto nell'ordine precedente e magari modificare i progetti ponte o i raccordi, ma non basta dire che cosa è stato fatto, occorre soprattutto sapere **come è stato fatto.** Occorre incontrarsi e intendersi sulle parole usate, a volte con significati diversi, occorre avere le idee chiare su quello che si deve fare o sapere, al di là di quanto viene detto nelle indicazioni.

Per finire un ultimo passaggio: abbiamo parlato di quantità di elementi. **Ma che cosa è un elemento? Da dove viene questa idea di elemento?** Elemento è una nozione un po' più sofisticata di cosa: questa parola indica qualcosa di concreto, mentre un elemento non lo e' necessariamente. Un numero è un elemento, ma non è una cosa. Il monte Bianco è un elemento? Sì, anche se non è qualcosa di preciso: dove termina esattamente, fino a che profondità si estende? I ragazzini di una classe sono elementi, ma sono diversi da un elemento come il topo o l'elefante. La nostra esperienza ci porta a cogliere vari aspetti di ciò che ci circonda, ma perché mettere assieme certi aspetti per costituire un elemento? Quando consideriamo un elemento attribuiamo ad esso un ulteriore aspetto, che aggrega a sé gli altri aspetti considerati, che e' quello di essere se stesso. Come si giunge alla nozione che qualcosa è se stessa? Dalla mia esperienza diretta personale di essere me stesso: nonostante io cambi in continuazione, nonostante io mi addormenti e perda la coscienza di essere me stesso, al risveglio so di essere me stesso, e lo so come esperienza diretta, come ogni esperienza diretta che mi procurano i sensi. Poi, si aggiunge questo aspetto agli altri considerati dall'esperienza esterna per dare unità a quegli aspetti assieme a questo, costruendoci così la nozione di un certo elemento ben specificato.

Ma per arrivare alla nozione di un generico elemento trascuro tutti i suoi altri aspetti fuorché **l'aspetto di essere se stesso.**

Questa nozione è importante se vogliamo parlare di quantità di elementi. Gli elementi sono qualcosa di inscindibile: non ha senso parlare di parti di un elemento. Quando conto, conto elementi, e gli elementi sono infiniti~~,~~: i numeri naturali, contano quantità finite di elementi.
Per avviare ai numeri naturali, dobbiamo avere chiaro che cosa si intende per quantità di elementi.
Ai bambini non presenterei queste nozioni come le ho dette a voi, ma l'insegnante deve avere le idee chiare, perché questo permette di individuare il passaggio che il bambino non ha colto nel suo apprendimento. L'individuare dove il bambino si perde avviene **attraverso il dialogo con lui; ed ogni bambino è proprio lui, non è la classe che perde il passaggio, ma la persona particolare.**
Resta aperto un problema: Spazio e tempo?
La nozione di tempo è strettamente legato alla memoria.
È passato significa legato alla memoria.
E il futuro? Si radica nella nozione di passato rispetto ad un trapassato: è ciò che mi fa supporre un futuro: siccome ho sperimentato che sempre ogni esperienza nella mia memoria (e quindi passata) è stata seguita da altre esperienze pure memorizzate (e dunque anch'esse passate) facendo diventare la prima trapassata, suppongo che ciò avvenga sempre, anche per le esperienze che non ho ancora vissuto (che ci saranno come nel trapassato non avevo ancora vissuto le esperienze passate successivamente), e così nasce l'idea di futuro.
Ogni volta il passato è diventato passato del passato, e questo ci porta al futuro… …nel prossimo incontro!

NUMERI NATURALI ED OPERAZIONI



Eric Temple Bell

alias **John Taine**

If "Number rules the universe" as Pythagoras asserted, Number is merely our delegate to the throne, for we rule Number.
Quoted in H. Eves *Mathematical Circles Revisited* (Boston 1971).

Se, come asserì Pitagora "i numeri regnano sull'universo", allora i numeri sono semplicemente i nostri delegati al trono, perché noi regniamo sui numeri

I NUMERI RAZIONALI ED IL PROBLEMA DEI DECIMALI

$$\frac{7}{25}=0{,}28$$

$$\frac{17}{3}=5{,}\overline{6}$$

$$\frac{3}{22}=0{,}1\overline{36}$$

6 DICEMBRE 2007-12-12

PRIMO INCONTRO: " NUMERI NATURALI ED OPERAZIONI"

"NUMERI NATURALI" CHE COSA SONO

Nel libretto di Fioroni ci sono delle cose molto belle sulla Matematica, ma vedo scritto: "Operare e comunicare significati con linguaggi formalizzati" che cosa significa?
Matematizzare, formalizzare, generalizzare, che cosa si capisce?
La scuola primaria penso sia fondamentale, perché pone le basi ed è il momento in cui il ragazzino inizia ad amare o ad odiare la matematica, quindi è un momento decisivo.
Intanto che cosa può fare o non fare per far odiare la Matematica, o meglio farla amare un insegnante? Intanto se l'insegnante odia la Matematica anche i ragazzi la odieranno.
Si sente spesso dire che bisogna farla amare, ma come si fa? Non penso che sia un contentino o un dono in cui si ritrova la soluzione che secondo me è da ricercare in una proposta interessante della matematica. I nostri ragazzi non sono animali da addestrare, i nostri ragazzini se sono solo addestrati non amano la matematica, ma ameranno qualcosa d'altro, la matematica resterà odiosa ed indisponente ed appena non servirà più sarà abbandonata. E la motivazione non può essere neppure che i nostri alunni andranno a fare i matematici, saranno pochissimi, la nostra matematica è per tutti e serve, perché è nella vita di tutti i giorni.
La matematica è importantissima, è indispensabile, nel nostro mondo si dice, ma ciò che dobbiamo dire è perché. Cosa che non fa la scuola, perché in un modo o in un altro la scuola nega i perché dei ragazzi, che col tempo colgono che chiedere perché significa non sapere delle cose.
Un altro pregiudizio è che la matematica sia arida. Un aneddoto ci fa risalire, nel 1900 ad Hilbert che teneva una scuola per Matematica. Una allievo si ritirò per andare a Lettere. E Hilbert rispose che se l'aspettava, perché quello studente non aveva fantasia.
Ed è proprio così, perché se pensiamo alla risoluzione dei problemi, ci vuole tanta fantasia e non una fantasia qualsiasi, ma una fantasia che funziona in quel caso. Per trovare la soluzione di problemi aperti abbiamo migliaia di anni di ricerca di soluzioni, di pensiero e per trovare soluzioni ci vuole tanta tanta fantasia. **Capire di che cosa si sta parlando, dove è il problema**…Ci sono problemi aperti che riguardano i numeri naturali come la congettura di Goldbach. "*Ogni numero naturale pari è la somma di due numeri primi*" Dimostrare che è sempre così è impossibile nessuno sa se ci sono dei numeri per cui questo non funziona. Nessuno sa se è sempre vero. Eppure stiamo parlando di numeri naturali: li conosciamo! Ma che cosa conosciamo dei numeri naturali?
Fin dalla prima elementare si studiano i numeri naturali, anzi fin dalla materna si insegnano i numeri naturali. **Ma che immagine abbiamo dei numeri naturali.** Possiamo dire che cosa sono i numeri naturali? O ne parliamo attraverso le loro proprietà? A che cosa servono i numeri naturali? Quante persone ci sono in questa stanza? Se noi sappiamo i posti totali e vediamo che ci sono pochi posti liberi, non contiamo.
Costruiamo i numeri naturali per cogliere ed apprezzare quantità di elementi, indipendentemente dal tipo. Quale è l'operazione fondamentale per cogliere la quantità di elementi? Anche nella scuola dell'infanzia dovrebbero avere già competenze di questo tipo. Quindi si fa una corrispondenza per vedere se ce ne son di più o di meno o tanti quanti. Se ho corrispondenza uno ad uno la quantità è la stessa, se invece me ne avanzano allora da una parte ce ne sono di più.
Questo è un apprezzare le quantità. Non serve solo sapere se sono di più o di meno, cosa che avviene nel confronto, ma occorre anche in alcuni casi sapere esattamente le quantità. Quindi in alcuni casi occorre dare un nome alle quantità.
Teniamo conto che quando conto perdo altre informazioni, quelle relative alla qualità ad esempio. Contare è un modo di apprezzare le quantità, metterle in corrispondenza…è considerare le quantità uno dopo l'altra, **è ripetere l'operazione del considerare un elemento dopo un altro**., c'è un confronto fra il ripetere questa operazione continuamente. Ci si accorge quindi di un'altra difficoltà, **la memoria del considerare uno dopo l'altro**. La nostra memoria non sempre è purtroppo vigile o

capace. Hanno fatto vedere in tv uno scimmione che secondo loro contava, perché schiacciava bottoni. In realtà l'uomo ha superato la scimmia proprio perché ha trovato un sistema per ricordare, per fissare l'dea, ad esempio mettendo delle tacche. Di fatto è un **utilizzare le corrispondenze**, **usando dei simboli**. Si possono fare delle registrazioni anche con i ragazzi, non serve riprodurre i disegni in modo fedele, ma occorre trovare dei **sistemi** efficienti **per registrare**. Non che non sia importante il disegno, ma mentre si fa matematica deve prevalere il trascurare particolari che non sono importanti per l'operazione del considerare un altro elemento.
La matematica elimina, trascura ciò che non è importante per l'obiettivo che vuole raggiungere.
Il contare serve per comunicare in modo standard e convenzionale con altri.
Una cosa che i ragazzi imparano abbastanza presto è il contare per gruppi. Dopo **il riconoscimento a colpo d'occhio delle quantità,** in genere per l'uomo è fino a sei, se si pone il problema di una quantità più numerosa, si arriva al **raggruppamento per poter contare**.
Perché contiamo per dieci?
È un compromesso tra una quantità non troppo piccola né troppo grande. Gli informatici contano per due, ma così non ci si arriva mai, allora contano per 8, perché basta prendere tre fili e si arriva alla base 8, quantità più ragionevole,perchè posso metterci degli simboli ecc
Non siamo ancora arrivati ai numeri naturali. Stiamo ancora cercando di capire quale è il problema
Il problema è apprezzare le quantità di elementi e sapere operare su di essi, gestirli. La natura è troppo complicata e non posso ricordare o gestire tutto. Per gestire quello che facciamo non possiamo tenere conto di tutto, dobbiamo trascurare, per gestire le informazioni dobbiamo trascurarne altre. Quali informazioni dobbiamo trascurare? Dipende da dove vogliamo arrivare. Il costruttore di un ponte è preoccupato della portata del ponte… non gli interessa il colore, mentre per il costruttore dello Seattle il colore è importante, per l'impatto con la luminosità il problema è sempre come trattare la superficie ma in alcuni casi è fondamentale, in altri no ecc.
Se tengo conto di tutto non vengo fuori dai problemi. Troppi dati che non riesco a gestire **Questo è la matematica che proprio per la sua natura non finisce mai. Questo non finire è uno dei problemi. E questo è un altro problema. Trascuro troppo? Troppo poco?**
È sempre un compromesso, magari trascurando troppo semplifico troppo, vedi la fisica degli antichi che teneva solo 4 elementi ed i movimenti avvenivano facendo andare al proprio posto le cose. Quindi era troppo semplificato per poter spiegare e capire. Allora rivediamo i dati, vedi Galileo…che però non funzionava del tutto, poi non trascurando certi aspetti viene fuori la relatività e così via.
Chi dice che la Matematica è tecnica non sa proprio che cosa è la matematica, chi dice che la matematica è certezza ha sbagliato strada. Certi schemi possono andar bene, facciamo tante cose per bene, ma non tutto. Dire che la matematica fa tutto non è giusto, perché dire che fa tutto è come dire che non fa niente.
Il calcolo è un modo per economizzare certo, le strategie di calcolo mentale sono da promuovere a tutto spiano, ed è l'unico ambito in cui si può ammettere la velocità della risposta,velocità che deve essere negata in tutti gli altri casi. Chi è più bravo non è il più veloce, ma quello che fa meglio e che sa perché ha fatto così.
Torniamo ai numeri Naturali. Quando contiamo andiamo avanti, quando giocano i bambini arrivano a dire che per contare, basta dire, uno di più e non si finisce mai, perché i numeri sono infiniti. Che cosa significa? Per i Greci infinito era uguale a non comprensibile, perciò l'hanno censurato. I Greci svilupparono molto la geometria, ma non studiavano nulla di infinito e anche se la retta è infinita loro la consideravano come un segmento. I filosofi greci buttano via l'infinito e non sviluppano nulla del numero, anche i rapporti restavano rapporti fra grandezze e non numeri. Nella matematica dei greci non c'erano i numeri. I Romani non svilupparono neppure loro l'aritmetica, contano raggruppando per cinque, c'è una posizionalità delle cifre. Ma come fanno ad operare? **Che cosa vuol dire operare?** Vediamo l'addizione, perché va cosi male fare le operazioni con il sistema dei Romani?

Che cosa è l'addizione? Ho fatto un'operazione sui simboli.
Calcolo che cosa significa? La civiltà romana era basata sulla schiavitù e gli schiavi facevano i calcoli sulle quantità, e ci potevan mettere anche più tempo. I Romani sapevano fare la moltiplicazione, ma non lavoravano sulle cifre come nei nostri algoritmi,ma facevano fare i conti agli schiavi.
Sapevano fare la moltiplicazione, altrimenti come avrebbero potuto gestire le truppe? Ma non conoscevano l'algoritmo, che non ha niente a che fare col mettere i numeri in colonna. **L'algoritmo della moltiplicazione è sulle cifre non sui numeri.** Quando si bambini si trovano dinanzi ad un problema dicono : "proviamo con la più", perché per lui è la più semplice, ma questo dimostra che non possiede il significato della moltiplicazione che va distinto dal significato dell'algoritmo. La fortuna dei numeri arabi, sta nella possibilità di operare facilmente sulle cifre, sui simboli. Lo schiavo romano eseguiva le operazioni senza possederne il significato, noi invece dello schiavo abbiamo i computer che fanno ciò che diciamo di fare, il computer esegue come macchina le operazioni sui simboli. Quando eseguo una operazione in colonna applico una regola senza il significato riferito all'operazione ed ai numeri. Moltiplicare che cosa significa? Non ha significato quando opero sui simboli, ma il risultato è giusto, coincide con quello che avrei ottenuto operando sui numeri. Questo algoritmo che cosa ha a che fare con il prodotto…. Con le scatole e i cioccolatini di un problema? Spesso il bambino della matematica coglie che si fa così perché mi hanno detto che si fa così e per prendere un bel voto devo fare ciò che l'insegnante chiede.
Non è detto che dobbiamo spiegare tutto ai bambini, ma noi insegnanti dobbiamo aver chiaro che cosa c'è sotto ad ogni operazione che non è per niente scontato o tanto meno semplice.
È importante non confondere l'algoritmo con le operazioni, fare **il calcolo significa passare dai significati alle rappresentazioni dei significati,** operare con regole sulle rappresentazioni.
È un po' come operare per un restauro, non avviene lo spostamento o la modifica reale, ma si opera su una piantina, su una rappresentazione. Così è il calcolo. Si opera su una rappresentazione in relazione a quello che voglio ottenere. Ho un problema reale, lo rappresento arrivo ad una soluzione finale che è quello che volevo ottenere.
Ci sono tanti tipi di calcoli: algebrico, infinitesimale… opero sempre in modo controllabile sulle rappresentazioni.
La notazione romana non ha il calcolo, questo è il suo guaio. Anche nella notazione araba non sempre c'è il calcolo ad esempio le potenze non hanno un algoritmo che dà il risultato. Anche con le cifre arabe non abbiamo fatto tutto, ma siamo andati molto avanti rispetto ai Romani. **Il trovare un calcolo è una grande impresa ed un successo incredibile della Matematica.**
È una capacità non banale, ma notevole. Occorre aver osservato che con certe regole si può costruire un calcolo. Una volta scoperta la regola si può poi far fare il calcolo anche ad una macchina, perché una macchina lavora anche senza possedere il significato, senza sapere che cosa si sta facendo.
Torniamo ai numeri che sono tanti e quando arrivo a dire che posso aggiungere sempre uno, vado avanti sempre, tra un numero ed un altro naturale in mezzo non c'è niente e c'è sempre un numero più grande di tutti. Archimede si è posto il problema di quale fosse il numero più grande di tutti. Quanti sono i granelli di sabbia? E le particelle elementari? Non bastava contare, ma anche rappresentare. Il più grande è un numero così grande che non posso rappresentarlo…in pratica tutti i numeri che possiamo immaginare sono sempre sotto a questo numero più grande. Ma come faccio a controllare che il numero pensato è sempre sotto al numero più grande?
Facendo una sottrazione non possiamo togliere di più, togliamo di meno…. E anche qui la soluzione è nella fantasia. Ogni numero il più grande può essere pensato anche se è oltre. La fantasia è potentissima, l'immaginazione mi permette di andare oltre, la soluzione di un problema è nella fantasia che mi apre al futuro. La fantasia però si appoggia sui significati. Per risolvere un problema devo sapere che cosa fa l'operazione, immaginarmela. Analizzare un testo va benissimo, ma devo avere chiari gli strumenti per poter risolverlo. **Devo possedere il significato delle operazioni, altrimenti l'analisi del testo non serve assolutamente a niente.**

Ma torniamo **all'infinito, che non sappiamo che cosa è.** Giovanni Prodi, non il presidente del consiglio, ma suo fratello più grande che è un matematico che si è molto dedicato alla didattica della Matematica, dice che la nozione di infinito è molto peculiare, prima non si sa che cosa è poi ad un certo punto la si usa… I numeri pari sono tanti quanti i numeri dispari, cioè sono in corrispondenza biunivoca, così anche fra i naturali ed i pari, e questo è un paradosso dell'infinito. Questo è un problema dell'infinito.
Vedi gioco delle urne. Che riempio di numeri a 5 a 5…..da una esce il più piccolo, dall'altra il più grande alla fine, quando ho messo dentro tutti i numeri naturali, che succede come restano le urne? Nell'urna dove esce il più piccolo escono tutti, invece dove esce il più grande ci sono infiniti elementi alla fine.
Questo è l'infinito: ha un comportamento stranissimo, contro intuitivo e tutto dipende da questa nozione di infinito, qualche cosa che non sappiamo che cosa bene sia. I numeri naturali sono infiniti, ma sono la minima quantità infinita per poter continuare nel conto. Ogni numero naturale è finito, ma i numeri sono infiniti e molte operazioni dipendono proprio da questa nozione. Es la proprietà commutativa. Possiamo fare molti esempi, non potremo mai provare se sempre è valido. Ad esempio prendiamo un insieme induttivo che ha la caratteristica di essere successore di un altro numero , fuorché lo 0 che però ha la caratteristica di avere un successore come tutti gli altri. C'è qualche esempio? Fra uno ed il prossimo non ci deve essere niente. Mi invento uno che è più grande di tutti, mi invento anche il suo successore ecc Tutti hanno predecessore. 0 non aveva predecessore e nascono i relativi. I numeri Naturali sono l'insieme più piccolo e valgono le proprietà che mi sono inventato.
La conclusione: l'idea che è dietro a tutto quello che abbiamo detto era che cosa è la matematica, non abbiamo detto che cosa sono i numeri naturali, abbiamo visto delle proprietà e questo serve per migliorare la nostra conoscenza e l'intuizione di che cosa sono i Numeri naturali, perché i ragazzi possano farsi un'idea mentale.
Nel dialogo l'insegnante coglie se l'idea che si sono formati è coerente con quella proposta dall'insegnante.
E dobbiamo tener conto che ogni ragazzo è unico e che la sua è un'idea personale. Diventa difficile indagare magari 25 idee, l'unica forza dell'insegnante è una robusta conoscenza.

Nel prossimo incontro i numeri razionali saranno al centro e qui il problema è…

Intanto proviamo a rivedere quanto sentito cercando di concentrarci su questa proposta "**Difficoltà e dubbi attorno ai numeri naturali nell'esperienza didattica**" nell'incontro di lavoro di gruppo del 20 dicembre l'affronteremo concentrandoci sulle difficoltà che incontriamo nell'insegnamento o meglio nell'individuazione di quei punti critici che non permettono ai nostri alunni di apprendere in modo significativo.

Incontro 17 gennaio

I NUMERI RAZIONALI e il problema dei decimali

I numeri naturali erano stati introdotti pensando al problema di apprezzare quantità di elementi attraverso delle corrispondenze biunivoche e quindi per contare delle quantità, cosa che dà indicazioni esatte di quantità di elementi. Con i numeri naturali possiamo fare delle operazioni. Era rimasta la domanda: ogni volta che conto devo ricominciare dall'inizio? L'idea era dover ricontare o ci sono delle operazioni da fare per ovviare a questo inconveniente? Se prendo venti oggetti e ne aggiungo altri 17 non conto nuovamente, ma uso delle operazioni come aggiungere, ripetere, sottrarre…

Noi abbiamo ottenuto così il concetto di numero naturale ma non la rappresentazione. Abbiamo le cifre, cioè scritture, e dei sistemi come quello decimale ed arabo molto utili in cui i numeri si denotano con successione di cifre. Ci sono proprietà molto interessanti come contare per gruppi ed attraverso questo si è costruito il calcolo aritmetico, che non è l'addizione, ma l'algoritmo che si fa sulle cifre per avere una successione di cifre che rappresenta davvero il risultato. Al di là delle operazioni c'è quindi anche il sistema di calcolo, un fatto eccezionale, che è valido solo per l'aritmetica non per altre discipline. Ricordiamo che i numeri romani non ebbero successo, perché non avevano un sistema di calcolo sulle cifre. Abbiamo però sempre parlato di quantità di elementi Ma se ho una stecca di cioccolato devo darla in parti uguali a dei ragazzini. O invece della cioccolata dell'aranciata, ho ancora delle quantità, ma non sono quantità di elementi. Ma sfruttando bene ciò che già sappiamo possiamo affrontare ora anche questo problema.

Il numero di persone fra cui devo dividere la mia quantità non di elementi è una quantità di elementi, quindi c'è un numero, una certa quantità. Ci sono quantità divisibili in un numero naturale arbitrario di parti (non zero, perché non ha senso) La quantità che ho può essere divisa. Con due numeri naturali posso rappresentare queste nuove quantità. Inoltre lo scopo è quello di confrontare quantità. Si vede inoltre che ci sono vari modi di dividere per ottenere la stessa quantità. Se io ho una torta e la divido per tre e prendo un pezzo, oppure posso dividerla per sei e prendo due parti ho la stessa quantità di prima, posso cioè **risuddividere** le parti. Se ho m/n è come dire mc/nc. I pezzi che ho preso sono c volte quelli che avevo prima e le divisioni sono c volte quelle di prima.

Queste sono chiamate frazioni o rapporti fra numeri naturali il numero razionale è la quantità rappresentata da tutte le frazioni fra loro equivalenti, la classe delle frazioni equivalenti.

Ma come faccio a sapere quali frazioni indicano la stessa quantità 4/6 e 6/9 indicano la stessa quantità? Come mi accorgo? Lo si potrebbe rappresentare, ma un disegno può dare l'idea, ma è sempre impreciso. Abbiamo detto che moltiplicando per lo stesso numero si ottiene la stessa quantità, in questo modo riconduco al fatto che le parti sono dello stesso tipo e quindi confrontabili. Devo trovare un criterio che vada bene sempre.

Due frazione m/n ed a/b sono uguali se e questa è una proprietà che riguarda i numeri naturali che sapevamo già.

Per farle diventare delle stesso tipo occorre ri-suddividere.

Occorre che i ragazzi sperimentano che una regola deve valere sempre, devono essere consapevoli, non accettare sulla fiducia.

È un passo molto difficile, ma è auspicabile che ci si renda conto di quello che si sta facendo, deve essere chiaro che si fa così perché ci si è resi conto. Quindi si tratta di superare l'esempio e riappropriarsi di una situazione generale che non necessariamente è concreta.

Occorre che aiutiamo i ragazzini ad assumere questa consapevolezza; occorre che si riapproprino del processo e ciò non necessariamente deve avvenire attraverso le cifre o i numeri. A questo riguardo il sistema ungherese, da cui sono usciti ottimi livelli di formazione matematica, introduce le cifre ed i numeri dopo un anno di alfabetizzazione.. Non è necessario, per rendere consapevoli del processo, lavorare sulle cifre.

Tornando ai numeri Naturali una competenza su di essi è la fattorizzazione, vale a dire che **ogni numero naturale può essere rappresentato come un prodotto.** Ciò riguarda i numeri naturali e non i razionali. In questo i numeri primi risultano il prodotto di 1 per se stesso. Un numero lo fattorizziamo scrivendolo come prodotto di numeri primi. I numeri primi poi si possono anche ripetere. Quindi ogni numero naturale è rappresentato come prodotto di numeri primi , ognuno con un suo esponente. Il teorema, dimostrabile, è molto delicato e dice che ogni numero primo ha diverse fattorizzazioni. I numeri primi sono infiniti (lo aveva dimostrato anche Euclide) sono sempre più rari, ma ci sono. Perché c'è sempre un numero primo più grande?
Nella scuola primaria si rappresentano a volte i numeri con forme rettangolari o quadrate, questo non è sempre vero, perché non tutti i numeri rettangolari sono primi. Altra nota è che nella nostra tradizione scolastica non si lavora sulle lettere e quindi sull'idea, sul processo, perché si è consolidata una tradizione che privilegiava il concreto. Il problema non è che se le cose non si possono fare concretamente non esistono o non valgono. I nostri ragazzi sanno fare usare la fantasia, sanno immaginarsi qualche cosa che non è concreto. Si possono inventare un gioco o un amico. Lo immagino con la fantasia, perché questa capacità deve essere neutralizzata? La realtà noi non la vediamo come è vediamo un modello di realtà di cui non ricordo mai tutto, ma solo aspetti significativi. Si tengono solo le cose che interessano. Quello che abbiamo del mondo è solo un'immagine del mondo parziale che riempiamo con dei voli di fantasia. Nessuno vede che è così ci sono grandi opere di fantasia che organizzano. Questo inventare qualche cosa per sistemare le informazioni è una qualità enorme dell'uomo e d è caratteristica e perché dobbiamo tarpare questi voli di fantasia nei nostri ragazzi? La fantasia ci vuole, va bene, la soluzione di un problema nasce nella fantasia, nell'immaginazione. Risolvo un problema, non perché vedo che cosa succede, ma perché voglio capire e per capire devo immaginare. Quello di abituare i ragazzi a vedere con gli occhi della mente è una operazione pedagogica importantissima che è in opposizione alla moda del "concreto". Immaginarmi qualcosa, progettare, pensare, per risolvere un problema è necessario vedere la scena, immaginarsi le cose è una capacità che tutti abbiamo, anche se dipende dal vissuto, dall'esperienza, dalla fiducia ecc. Più uno ha un vissuto ricco più ci sono aperture e possibilità, la ricchezza del vissuto apre la mente. Dobbiamo aiutarli ad acquisire un vissuto sempre più ricco. Tutta la ricchezza che hanno acquisito diventa il punto di partenza. A proposito di concreto, è concreta la forza di gravità, ognuno sa che c'è ma nessuno l'ha vista. L'immaginazione è alla base. Siamo appena all'inizio di questo escursus sui numeri naturali, ma ciò che segue, se ben abbiamo colto questa prima parte, il resto non è poi così difficile. Pensiamo alle operazioni, ad esempio la somma, che cosa significa? Aggiungere quantità dello stesso tipo, quindi devo trasformare i miei numeri razionali dello stesso tipo. Per la sottrazione è la stessa cosa, anche se devo avere una quantità da cui poter togliere, visto che sono nei razionali positivi. Per la moltiplicazione se moltiplico per un intero non c'è problema, perché ripeto la quantità c volte. Ma se voglio un prodotto fra due razionali , me lo posso immaginare come un ripetere di divisioni. La moltiplicazione fra numeri naturali non prevede questo, è un significato nuovo, è un'estensione della nozione di moltiplicazione. Avevo terzi che moltiplico per mezzi, li risuddivido, quindi è una moltiplicazione di divisioni. La nozione così introdotta rispetto ai naturali è qualche cosa di più include la moltiplicazione fra naturali, e valgono tutte quelle proprietà su cui si basava il calcolo. La divisione significa dividere in tante parti, quindi la divisione di divisioni, quindi un reciproco della moltiplicazione.
Ora consideriamo le scritture decimali. Anche qui occorre partire dai problemi reali. Un problema può essere quello economico, io devo pagare, ad esempio posso prendere come unità € 10, ma posso anche usare un taglio da 100 o più piccolo, il numero cambia. La stessa cosa per le distanze. Se poi devo unire delle quantità devo poter trasformare, in questo caso può essere utile l'uso della virgola. Faccio riferimento ancora, però per la scrittura ai numeri naturali, quindi i numeri con la virgola sono numeri naturali rispetto ad un gruppo. L'unità di misura si rapporta alla lunghezza che devo misurare: la distanza fra le stelle la misurerò in anni luce, la lunghezza della strada in kilometri. C'è sempre qualche cosa di ragionevole, per ottenere un numero che mi dice qualche

cosa, lo scopo è sempre renderci conto di quello di cui stiamo parlando. Se invece ci chiediamo quanto fa un terzo, se dobbiamo dividere fra tre persone, 1€ , ognuno avrà 33 centesimi ed uno 34, quindi non è una divisione giusta, per essere più precisi si può mettere un altro 3, ma per quanto tempo? Questo ha senso con i numeri razionali. Arrivo così a delle approssimazioni, penso ad infiniti numeri con sempre più cifre, non è un solo numero, ma tanti, sempre con più cifre. La difficoltà poi dipende dalla base di numerazione, perché, sempre un terzo, in base 10 è 1,3333…. Ma in base 3 mi diventa 0,1 e così……..le difficoltà della divisione in questa successione di cifre non dipendono dai numeri, ma dalla rappresentazione dei numeri, dalla scelta della base. Se scelgo una base diversa cambia tutto. Quindi è vero che i numeri decimali si possono vedere come razionali, ma occorre stare molto attenti.
Per come siamo abituati a visualizzare ci possono essere dei vantaggi nelle diverse scritture ad esempio mi può dire di più 1,7 che 17/10.
I numeri razionali sono nati per poter dividere in parti uguali una certa quantità ma sono continui?, ci sono dei numeri fra razionali? Non ci sono interruzioni nella successione? Ci sono grandezze che non sono rappresentabili neppure con i razionali? Ad esempio la diagonale del quadrato è un numero che non è razionale: la radice di 2.. numeri razionali il cui quadrato è due non ce ne sono, quindi radici di 2 non è razionale. Quindi nei razionali non ho la continuità. Una quantità però che può essere approssimata. La fantasia umana crea delle costruzioni interessantissime…nessuno ci scaccerà mai dal paradiso di Cantor, questo paradiso che ci siamo costruiti, anche se occorre dominare l’immaginazione.

LINGUA E MATEMATICA


Giuseppe Peano

Resulta que vocabulos de Mathematica, et in generale, de omni scientia, es internationale, vel commune ad linguas de Europa, ab Italo ad Anglo, ab Hispano ad Russo.
Dalla *Praefatione al Formulario Mathematico*,1908.

Risulta che i vocaboli della Matematica, e in generale di ogni scienza sono internazionali, cioè comuni alle lingue europee, dall'italiano all'inglese, dallo spagnolo al russo.

La matematica è un gioco che segue alcune semplici regole giocato con segni senza senso sulla carta. **David Hilbert** (1862-1943)

LINGUA E MATEMATICA 28 FEBBRAIO 2008 PROF RUGGERO FERRO- UNIVERSITÀ DI VERONA

Fermatevi quando c'è qualche cosa che non è chiaro, perché è molto più difficile del previsto. Interrompetevi, perché non è semplice.
Noi viviamo la realtà che ci circonda, ma come è la realtà. Mettiamoci nella situazione del ragazzino che si accorge di essere in un contesto, in una realtà che non dipende da me. Una cosa è però accorgersi della realtà, un'altra è conoscerla. Quindi c'è una **realtà** e la nostra **conoscenza** della realtà. La nostra idea della realtà è che è quella che è, è una conoscenza imprecisa, incompleta, provvisoria, in continua evoluzione, è intuitiva. La realtà è sempre la stessa, ma cambia il nostro modo di vederla e di organizzarla, che può avvenire in modo diverso. **La realtà è unica , ma i modi di vederla sono diversi.** Questi modi di cogliere la realtà vengono dall'esperienza, ma anche moltissimo da quello che ci viene detto o insegnato, perché la nostra capacità di sperimentare la realtà è molto limitata. Prendiamo ad esempio, la carta geografica, ci dice quello che qualcun altro ha fatto, è un lavoro di altre persone che ci viene comunicato. Nessuno si rende conto esattamente di alcune distanze o di quanto ad esempio è obliqua l'Itali. È più a sud Bari o Napoli. È difficile renderci cono che Bari sia più a Nord di Napoli. Queste risposte posso darle, solo perché qualcuno me le ha dette. Noi ci basiamo su queste informazioni, ci fidiamo del lavoro di altri. **La nostra conoscenza della realtà quindi dipende dalla fiducia che si dà e da una connotazione. E perché dobbiamo aver fiducia negli altri? Sotto c'è un problema, perché dobbiamo fidarci di qualche cosa che ci viene detto e che non possiamo verificare?** Perché dobbiamo credere a quello che ci viene detto che è accaduto nel passato? I bambini hanno molta fiducia nelle persone, assorbono tutto. Molte cose che sappiamo le sappiamo perché ce le hanno raccontate: che cosa è un atomo, un elettrone o un protone? Sono modelli che giustificano quello che sappiamo, nessuno li ha mai visti. Ed anche i microscopi elettronici non ci fanno davvero vedere, perché anche qui c'è un attraverso altri strumenti come le lenti, la luce ecc… in base alla teoria… elaboriamo con il computer e.. quindi anche qui c'è un'immagine della realtà. Così ancora a livello astronomico. Pensiamo solo alle stelle ed ai segni zodiacali che sono stati "visti" in un'epoca che non ci corrisponde più, e come è possibile vedere stelle lontane anni luce? ed ancora chi ha visto la gravità? E chi ha visto l'energia nucleare? La conoscenza della realtà è molto lontana dalla realtà stessa e avviene attraverso teorie che mi vengono raccontate. Senza parlare delle teorie relative alla biologia: esempio il DNA che … è una teoria. Chi ha visto atomo per atomo? È tutta una immaginazione, una costruzione di cui abbiamo fiducia. È una rappresentazione della realtà . Tutto questo per insistere sull'importanza della comunicazione
Il bambino quindi impara, perché ha esperienza diretta, ma impara tantissimo, perché gli viene detto, impara anche i numeri. I numeri si imparano dall'esperienza, ma ci vuole un'elaborazione mentale.
Galilei diceva che **la Matematica è il linguaggio della natura, in realtà è il modo che l'uomo si è dato per leggere la natura, la matematica non è nella natura, ma il modo che l'uomo si è dato per capire la natura, per organizzare la natura. Il linguaggio non è nella natura, è uno strumento dell'uomo**, per elaborare i concetti, per organizzare il modo di vedere. Ma il linguaggio stesso ha dei limiti? Nasce da una convenzione. Il problema si pone anche con i numeri che sono una anch'essi convenzione. Sappiamo di che cosa stiamo parlando e a quell'oggetto poniamo un nome, che oltretutto è ben radicato nel tempo in cui è nato, pensiamo alla parola carogna che significava cadavere, ma se ad una persona diciamo ora carogna risulta offensivo. Quindi il linguaggio si modifica, ma questo modificarsi, se è un pregio, dall'altro diventa anche un limite. Il linguaggio può dire tutto quanto?Le parole cambiano significato nel tempo. Io devo raccontare ai bambini quanti sono i numeri naturali, devo aggiungere uno, ma non ho detto che cosa sono, posso dire a che cosa serve. Il dizionario spiega con parole di cui si dovrebbe già conoscere il significato, che sono altre, perché per spiegare non posso usare la stessa parola. Che cosa è un numero? Un

numero è un numero…queste parole rimandano al significato di altre parole e così via, abbiamo quello che si può **chiamare il regresso infinito delle parole che alla fine ritorna alla parola primitiva che dovevamo spiegare.** L'idea è che ad un certo punto si deve spezzare questo circolo vizioso e ciò avviene conoscendo il significato di una parola. In matematica c'è esattamente lo stesso problema : quelle poche parole da cui parto vengono chiamate **nozioni prative come numero, punto retta che sono conosciute senza dare spiegazioni.** Noi abbiamo bisogno di fermarci in questo regresso con delle nozioni che sono comprese intuitivamente, questo è quello che supponiamo dai nostri ragazzi. Nessuno di noi si è messo a spiegare queste nozioni, le diamo per scontate. Come si acquisiscono queste nozioni primitive? Noi non ci accorgiamo neppure che stiamo dando per scontato che si sappia, perché nessuno lo ha mai detto. E ciò è perché non è possibile, il linguaggio ha dei limiti. Ad un certo punto diamo una definizione presupponendo una nozione nota, nota senza definizione, detta primitiva. I matematici hanno cercato anche un'altra via,invece di definire hanno descritto il comportamento, si pensi alla geometria, si descrivono dei comportamenti. Così anche con i numeri, preso un numero che è lo zero, c'è un successivo e così. Quando si prende in considerazione il comportamento si può usare la stessa parola di cui vogliamo sapere il significato, è nelle frasi: per due punti passa una sola retta, ci sono le parole retta e punto: **sono le definizioni implicite.**

Nel linguaggio naturale le parole cambiano di significato a seconda del contesto, nel linguaggio formale invece si costruisce, è un linguaggio artificiale, che si costruisce dicendo come si costruiscono le frasi, le parole si danno in un modo ben precisato, il tal simbolo, quell'altro ecc tutto viene ad avere un significato univoco, per tutti. È un linguaggio simbolico, un linguaggio in cui i segni ed i simboli hanno solo un ben determinato significato. Perché un simbolo deve avere un certo significato? Questo tipo di descrizione comunque non dà mai la definizione esplicita, ma sono riuscito a precisare. O uno lo sa già o.. ci devono essere cose di base che uno sa già, ad esempio la nozione di spazio c'è nella nostra testa, questa idea viene dalla Grecia e Kant fu uno dei pilastri dell'idea innata di spazio, per Kant era un sintetico a priori Ma intanto contemporaneamente a Kant vissero altri personaggio di cui Kant non aveva letto il lavoro:Gauss,.. …che costruirono le geometrie non euclidee che non si basano sull'assioma delle parallele della geometria euclidea, pur soddisfacendo le altre proprietà. Per i greci si parlava di segmenti. Dimostrare l'assioma delle parallele non era così semplice. Se io prendo una retta ed un punto fuori dalla retta per questo punto passa una ed una sola parallela. Se disegno questa parallela, se la prolungo… se non l'ho disegnata tanto bene, se la prolungo e la prolungo ancora, forse non è poi tanto parallela, si diceva che c'è però e ne passa una ed una sola, devo andare indefinitamente avanti. Se si va all'infinito… per i Greci l'idea di infinito non esisteva, per i Greci è non comprensibile, non definito, quindi per la mentalità dei Greci gli assiomi erano l'ovviamente vero. Quindi si basavano su affermazioni ovviamente vere. Qui si inserisce il lavoro di Saccheri, che nega i postulati e vede che cosa segue dalla negazione, è valutando le contraddizioni dimostra per assurdo. Così costruisce tutta una serie di affermazioni stranissime, nel quale non si vedono contraddizioni. Quindi emerge una nozione di spazio diversa da quella di Euclide, ma non contradditoria. Quindi nella geometria Euclidea trova spazio quella non euclidea, quindi le due geometrie che non sono compatibili sono però ugualmente credibili. Questo dimostra che la geometria, il nostro modo di vedere lo spazio non è uguale, ci sono modi diversi. I fisici nucleari seguono una geometria non euclidea, gli scienziati della NASA quella euclidea, perché più conveniente. Come è fatto allora il vero spazio fisico? Ci sono modelli diversi., più o meno opportuni a seconda dei modelli che devo affrontare. **La conclusione è che lo spazio non è un'idea a priori, non è qualche cosa che c'è già.** Va bene la descrizione assiomatica, no, perché ci sono diversi modelli, è un'idea a priori? No quindi come faccio a farmi l'idea? Ci si può basare solo sulla fiducia?

Ho partecipato ad un'esperienza all'interno di un progetto della regione Veneto, e dirò che ne sono rimasto amareggiato, perché mi sono reso conto che si fanno delle cose senza aver lavorato sul significato di ciò che si sta facendo, sul significato delle operazioni, sull'uso consapevole degli

strumenti,nessuno glielo aveva detto. Certo alcuni erano svegli e quindi riuscivano a lavorare, ma mi rendevo conto che questa didattica organizzata per lavoro di gruppo in cui dal niente occorre scoprire le cose non porta a dei risultati, il compito dell'insegnante era quello di comunicare alcune nozioni. Ai ragazzini piace moltissimo capire, avere un'idea e quando capiscono si entusiasmano.
Ma non si deve dare per scontato che bambini abbiano nozioni innate.
Noi insegnanti dobbiamo conoscere il percorso da fare, per poter dare indicazioni precise, ma è necessario conoscere che cosa il bambino conosce di quel percorso, perché se per noi un particolare è ovvio, non è detto che lo sia anche per l'alunno. Diamo per scontate troppe cose, e questo diventa una limite del nostro insegnamento. Dobbiamo ben conoscere quali sono gli snodi della disciplina, capire tutti i passaggi e non saltarne nessuno e questo non si trova sui libri…
Sicuramente le idee ce le facciamo con l'esperienza e senza esperienza non andiamo da nessuna parte,l'esperienza è l'unica cosa che possiamo condividere e trasmettere, ma l'esperienza è personale, possiamo discutere, ma resta personale. Ma le nozioni matematiche non sono esperienza, perché il numero cinque nessuno lo ha incontrato per strada, quello che succede è che noi elaboriamo mentalmente, per esempio elaboriamo mentalmente i numeri dopo aver verificato una corrispondenza fra oggetti e mi devo liberare dell'oggetto e considerare solo la quantità, quindi si opera un'astrazione, in cui c'è il confronto, la memoria. Sull'esperienza personale avviene un'elaborazione mentale. Quindi è fondamentale l'uso della memoria e per la mia memoria mi sono d'aiuto dei segni. La progressione di aggiungere uno e di non terminare, ma con i numeri si va all'infinito, ma qui non si termina, e questo non terminare è qualche cosa di cui non abbiamo esperienza. **Abbiamo analizzato le difficoltà del linguaggio, cioè che il linguaggio non è sufficiente per dire le nozioni e non conviene presentarle, ci mettiamo d'accordo sui concetti, ma su quel qualche cosa che c'è nel mio concetto…, e quindi ci accordiamo sulle nozioni fondamentali.**
Esempio possiamo andare vanti sempre, non termina mai e qui vien fuori che.. ad esempio gli infiniti sono tanti e non ugualmente numerosi, cosa non prevista quando si diceva non termina mai? Nel costruire la nozione occorre rivedere il percorso e riagganciarsi al significato o ai vari significati come ad esempio della moltiplicazione o i vari tipi di numeri. **Quindi occorre dare significato, cosa che non si fa attraverso il linguaggio, ma attraverso l'elaborazione mentale**.
Altra nozione d'affrontare è la nozione di calcolo, in cui rappresento simbolicamente ed opero sui simboli. Uso varie notazioni es la Romana, la araba. Quindi la rappresentazione è diversa dalla realtà pur essendo ad essa legata, un po' come il disegno dell'architetto. **Nell'uso dei simboli ho un linguaggio artefatto che rappresenta però la realtà, allora l'addizione non è solamente aggiungere delle quantità, nel calcolo avviene un gioco sui simboli e mi risulta il risultato come se fosse sui numeri. Questo èp specifico della matematica, perché non mi succede in altre discipline**. Le proprietà delle operazioni sono sui numeri non sulla scrittura, Mentre il calcolo lo eseguo sulla scrittura, sui simboli, sulle cifre. Posso dimenticare del tutto il significato e usando ad esempio le tabellone delle operazioni eseguire i calcoli. Il computer non sa assolutamente quello che fa ma con il linguaggio con cui è stato programmato ottiene i risultati. Il linguaggio formale usato bene e costruito nel modo giusto ci permette di ottenere i risultati. In questo rileviamo l'uso positivo del linguaggio che non si ha in tutte le discipline. Comunque prima di usare le regole è stato necessario inventare le regole del linguaggio e di trasformazione sul linguaggio. **Se da una parte quindi il linguaggio ha dei limiti, dall'altro è uno strumento potentissimo, ma deve essere ben fatto.** Morale della favola comunque è che ci deve essere il significato ed il linguaggio per rappresentarlo e devono essere ben chiari e distinti.
Chiaramente queste cose non si portano in classe, ma sono cose che servono perché l'insegnamento sia efficace, perché si riesca a mantenere viva nei ragazzini la curiosità o dare a loro la voglia di far domande (premiare la curiosità) proprio perché abbiamo noi coscienza delle potenzialità e dei limiti del linguaggio.